Criterio del confronto

Consideriamo due serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tali che:

- se $a_n \le b_n$ e la $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora la $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente;
- se $a_n \ge b_n$ e la $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, allora la $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente.

Esercizio 1

Mediante il criterio del confronto dimostrare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Consideriamo la serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots.$$

consideriamo il termine generale:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

ed osserviamo che:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$$

Allora il termine della serie data sono minori dei corrispondenti termini della serie armonica generalizzata $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che sappiamo convergente, perciò anche la seria data $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è convergente.

Esercizio 2

Mediante il criterio del confronto dimostrare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{sen(n\alpha)}{2^n}$$

Consideriamo la serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{sen(n\alpha)}{2^n}$$

e consideriamo il termine generale:

$$a_n = \frac{sen(n\alpha)}{2^n}$$

e poiché:

$$\left| \frac{sen(n\alpha)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

i termini della serie proposta sono in modulo maggiorati dei corrispondenti termini della serie geometrica $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergente poiché la ragione $h = \frac{1}{2} < 1$ è convergente quindi la serie data è assolutamente convergente.

Esercizio 3

Mediante il criterio del confronto dimostrare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{arctgx}{\log^2 x + 2^n}$$

Consideriamo la serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{arctgx}{\log^2 x + 2^n}$$

consideriamo il termine generale:

$$a_n = \frac{arctgx}{\log^2 x + 2^n}$$

e poiché:

$$\frac{arctgx}{\log^2 x + 2^n} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{\log^2 x + 2^n} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$$

i termini della serie proposta sono in modulo maggiorati dei corrispondenti termini della serie geometrica $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergente poiché la ragione $h = \frac{1}{2} < 1$ è convergente quindi la serie data è convergente.

Esercizio 4

Mediante il criterio del confronto dimostrare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{sen^2 n + 3}{n+2}$$

Consideriamo la serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{sen^2 n + 3}{n+2}$$

consideriamo il termine generale:

$$a_n = \frac{sen^2 n + 3}{n+2}$$

e poiché:

$$\frac{sen^2 n + 3}{n+2} \geq \frac{3}{n+2} > \frac{3}{n+n} = \frac{3}{2}\frac{1}{n}$$

i termini della serie proposta sono in modulo minorati dai corrispondenti termini della serie armonica $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ divergente quindi la serie data diverge positivamente.